به نام خداوند جان آفرین

ریاضیات مهندسی

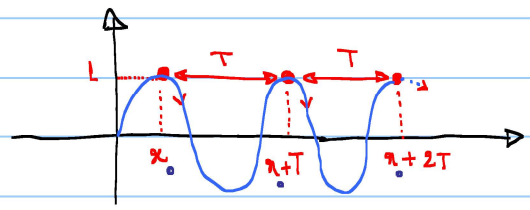
مینی ترم تابستان ۹۹ دانشکده برق

[مدرس: دکتر شادلو]

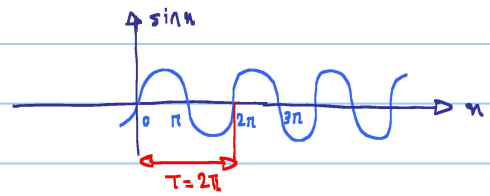
اینستاگرام @myparseh123
تلگرام @Riazitest
۰۹۳۵۹۳۴۱۱۹۴
۰۲۱-۸۴۳۸۸
parseh.ac.ir

آنالیز فوریه

$f(x)$ تابع متناوب است: رفتار و مقدار تابع در بازه‌های مشخص T (دوره تناوب) تکرار است.

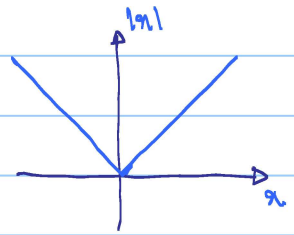


$$f(x_0) = f(x_0+T) = f(x_0+2T) = f(x_0 \pm kT)$$



$f(x)$ متناوب:
- ذاتاً متناوب هستند
- ساختگی متناوب هستند

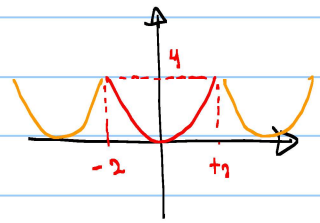
توابعی که به صورت ساختگی متناوب هستند:

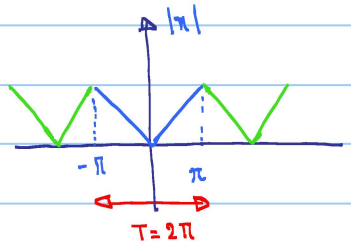


$f(x) = |x|$

$-2 \le x \le 2$

$f(x) = x^2$



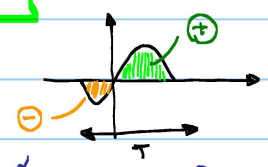


$f(x) = |x| \quad , \quad -\pi \le x \le \pi$

تابعی که به صورت ذاتی یا ساختگی متناوب هر باشد را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از جملات sin و Cos و عدد ثابت (در ساده‌ترین حالت: به طوری که نه در هم ضرب شوند و نه به توان برسند) نمایش داد که موسوم به سری فوریه می‌باشد.

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{L}x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{L}x} \quad , \quad \boxed{(T = 2L)}$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx \quad , \quad a_0 = \frac{2\,S_{\text{خالص}}}{T}$$



$$\boxed{dc = \frac{a_0}{2}}$$

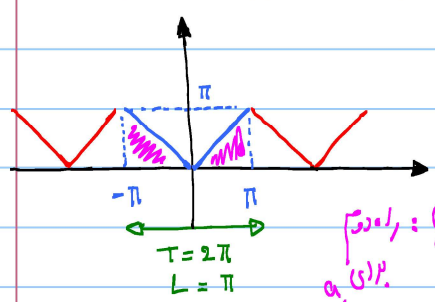
$S_{\text{خالص}}$: مساحت زیر نمودار در یک دوره تناوب با در نظر گرفتن علامت (مساحت بالای محور xها ⊕ و مساحت پایین محور xها ⊖)

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

مثال: سری فوریه تابع زیر را بدست آورید؟

$f(x) = |x| \quad , \quad -\pi \leq x \leq \pi$



$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{|x|}_{\text{زوج}}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\,dx$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{\pi} = \pi \qquad a_0 = \pi$$

راه دوم: $a_0 = \frac{2(2\,S)}{2\pi} = \frac{2\left(2\,\frac{\pi\times\pi}{2}\right)}{2\pi} = \pi$

برای a_0

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{|x|}_{\text{زوج}}\,\underbrace{\cos nx}_{\text{زوج}}\,dx$$

$$\boxed{\int_0 x\,dx = \frac{x^2}{2} \qquad \int_0 \cos nx\,dx = \frac{1}{n}\sin nx}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx + \frac{1}{n^2}\cos nx\right)\Big|_0^{\pi}$$

x	⊕	$\int$
1		$\frac{1}{n}\sin nx$
0	⊕	$-\frac{1}{n^2}\cos nx$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{n}\underbrace{\sin n\pi}_{0} + \frac{1}{n^2}\cos n\pi - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$a_n = \frac{2}{\pi n^2}\left(\cos n\pi - 1\right)$$

$$a_n = \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right)$$

$$a_n = \begin{cases} n = 2m & 0 \\ n = 2m-1 & -\frac{4}{\pi n^2} \end{cases}$$

در این مثال $f(x)$ زوج $\longrightarrow (b_n = 0)$

$$|x| = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi - 1)\cos nx$$

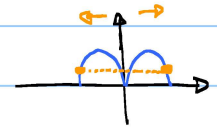
$$|x| = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} -\frac{4}{\pi n^2}\cos nx \quad , \quad |x| = \frac{\pi}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} -\frac{4}{\pi(2m-1)^2}\cos(2m-1)x$$

- تابع با گستره زوج $= dc + \sum \cos \quad (b_n = 0)$
- تابع با گستره فرد $= \sum \sin \quad (a_n = 0)$
- تابع با گستره نه زوج و نه فرد $= dc + \sum \sin + \sum \cos$

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos x - \frac{4}{9\pi}\cos 3x - \frac{4}{25\pi}\cos 5x, \ldots$$

$dc = \frac{a_0}{2}$ $\quad a_1 \quad a_3 \quad a_5$

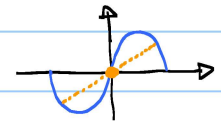
! تابع زوج :



$f(x)$ ، $-a \le x \le +a$ ، $f(-x) = f(x)$

مثال : $\cos x$ ، $|x|$ ، x^2+4 ، x^4 ، $e^{|x|}$ ، ...

! تابع فرد :



$f(x)$ ، $-a \le x \le +a$ ، $f(-x) = -f(x)$

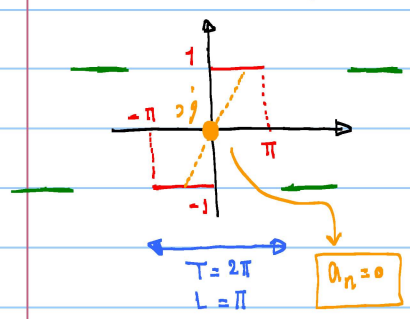
مثال : $\sin x$ ، x^3 ، $\tan x$ ، ....

! زوج = فرد × فرد ، فرد = فرد × زوج ، زوج = زوج × زوج

! $\int_{-\gamma}^{\gamma} \text{زوج} = 2\int_{0}^{\gamma} \text{زوج}$ ، $\int_{-\gamma}^{\gamma} \text{فرد} = 0$

مثال : لطفاً سری فوریه تابع زیر را بنویسید ؟

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le \pi \\ -1 & -\pi \le x \le 0 \end{cases}$$



! $$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \underbrace{f(x)}_{\text{فرد}} \underbrace{\sin\frac{n\pi}{L}x}_{\text{فرد}}\, dx$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (+1)\sin nx\, dx = -\frac{2}{\pi n}\cos nx \Big|_0^{\pi} = -\frac{2}{n\pi}(\cos n\pi - 1)$$

$$b_n = \begin{cases} 0 & n = 2m \\ \frac{4}{n\pi} & n = 2m-1 \end{cases}$$

! $\int \sin nx\, dx = -\frac{1}{n}\cos nx$

$$\boxed{f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{(2m-1)\pi}\sin(2m-1)x}$$ ✓

نکته مهم : محاسبه سری‌های عددی با روش تربیع

۱ـ حاصل سری‌های عددی تقریب مناسبی از ۲ یا ۳ جمله اول سری می‌باشد

۲ـ اگر سرعت رشد سری m باشد معمولاً حاصل سری به صورت $\frac{\pi^m}{\bigcirc}$ می‌باشد

۳ـ اگر تمام جملات سری ⊕ باشد حاصل سری کمی بیشتر از جمله اول و اگر تمام جملات سری یکی در میان ⊕ و ⊖ باشد حاصل سری کمی کمتر از جمله اول می‌باشد

$\pi^2 \simeq 9.86$ ، $\pi^3 \simeq 31$ ، $\pi^4 \simeq 97$

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{\bigcirc}>1 \qquad \simeq 1.1 \qquad \boxed{\pi^2/8}$$

$$1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}=\frac{\pi^3}{\bigcirc}<1 \qquad \simeq 0.97 \qquad \boxed{\pi^3/32}$$

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n)^2}=\frac{\pi^2}{\bigcirc}>1 \qquad \simeq 1.35 \qquad \boxed{\pi^2/6}$$

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{\bigcirc}>1 \qquad \simeq 1.05 \qquad \boxed{\pi^4/90}$$

مثال: اگر سری فوریه مثلثاتی تابع زیر را بنویسیم، آنگاه مقدار سری‌ها عددی زیر را برابر است با؟ (دکترای - مهندسی - ۹۲)

$$f(x)=\begin{cases}\pi/2+x & -\pi\le x\le 0\\ \pi/2-x & 0\le x\le\pi\end{cases}$$

$$A=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\simeq 1.1$$

$$B=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}=1-\frac{1}{3^3}+\cdots\simeq 0.97$$

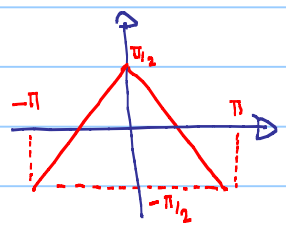
$\frac{31}{16}>1$ ← $B=\frac{\pi^3}{16}$, $A=\frac{\pi^2}{8}$ (۱) ✗

$B=\frac{\pi^3}{32}$, $A=\frac{\pi^2}{8}$ (۲) ✓

$B=\frac{\pi^3}{32}$, $A=\frac{\pi^2}{4}$ (۳) ✗ → $\simeq 2.5$

$B=\frac{\pi^3}{16}$, $A=\frac{\pi^2}{16}$ (۴) ✗ → <1

راه اول:



زوج

$b_n=0$ ⟶ $a_0=0$ (مساحت فاصله = ۰)

$T=2\pi$

$L=\pi$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{f(x)}_{\text{زوج}}\underbrace{\cos nx}_{\text{زوج}}\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos nx\,dx$$

مثال: اگر بسط سری فوریه کسینوسی نیم‌دامنه $f(t) = 1 - t$ ، $0 < t < 2$ را بنویسیم آنگاه مقدار سری عددی زیر را بدست آورید؟

(ارشد - سراسری - مکانیک ۹۴)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} =$$

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots \simeq 1.1$$

۱) $\frac{\pi^2}{8} \simeq 1.1$ ✓

۲) $\frac{\pi^2}{4} \simeq 2.5$ ✗

۳) $\frac{\pi^2}{2} \simeq 5$ ✗

۴) $\pi^2 \simeq 10$ ✗

مثال: اگر سری فوریه تابع تناوبی $f(x) = |\sin x|$ با دوره تناوب 2π به صورت زیر باشد آنگاه حاصل مجموع خواسته شده را بدست آورید؟

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{(2n-1)(2n+1)}$$

(اتوماسیون و ابزار دقیق ۹۳)

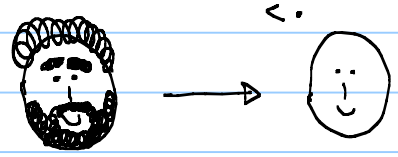
$$\frac{1}{3^2 \times 5^2} + \frac{1}{5^2 \times 7^2} + \cdots = \frac{1}{225}$$

۱) $\frac{9\pi^2 - 88}{144}$ ✓

۲) $\frac{88 - 9\pi^2}{144} < 0$ ✗

۳) $\frac{\pi^2 - 8}{16} \neq \frac{1}{225}$ ✗

۴) $\frac{8 - \pi^2}{16} < 0$ ✗



مثال: تابع متناوب $f(x)$ در یک دوره تناوب سری فوریه زیر به صورت زیر دارد

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -\alpha < x < +\alpha \\ 0 & -\pi < x < -\alpha ,\quad \alpha < x < \pi \end{cases} = \frac{\alpha}{\pi} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin \alpha}{1}\cos x + \frac{\sin 2\alpha}{2}\cos 2x + \cdots\right)$$

در این صورت حاصل سری $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin n\alpha}{n}\right)^2$ را بیابید؟ (ارشد - سراسری برق ۸۹)

۱) $\frac{\alpha(\pi-\alpha)}{2}$ ✓

۲) $\frac{(\pi-\alpha)(\pi+\alpha)}{2}$ ✗

۳) $\alpha(\pi-\alpha)$ ✗

۴) $(\pi-\alpha)(\pi+\alpha)$ ✗

$\alpha = 0 \longrightarrow \sum = 0$

$\alpha = \frac{\pi}{2} \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n}\right)^2 = 1 + \frac{1}{3^2} + \cdots \simeq 1.1$

$\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} \simeq 2.5$

به ازای $-\pi < x < \pi$، $x = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin(nx)$ و $x^3 = -2\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\pi^2}{n}-\frac{6}{n^3})(-1)^n\sin(nx)$ است. از ضرب داخلی این دو تابع، کدام نتیجه، حاصل می‌شود؟

دکترای برق ۹۵

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\pi^2-\frac{6}{n^2}\right)=$$

$$= 4+2.5+1+0.5+\cdots \simeq 9$$

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(\pi^2-\frac{6}{n^2})=\frac{\pi^4}{10}$ ✓

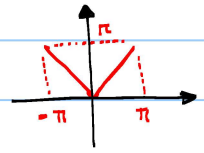
۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(\pi^2-\frac{6}{n^2})=\frac{\pi^4}{5}$ ✗ $\simeq 20$

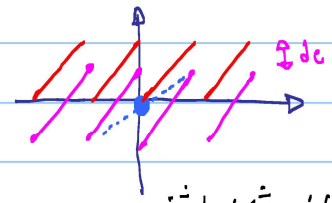
۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(\pi^2-\frac{6}{n^2})=\frac{\pi^3}{5}$ ✗

۴) $\sum\frac{1}{n^2}(\pi^2-\frac{6}{n^2})=\frac{\pi^3}{10}$ ✗

نکات تکمیلی سری فوریه

مثال :





⇒ فرد محض = dc + Σ sin

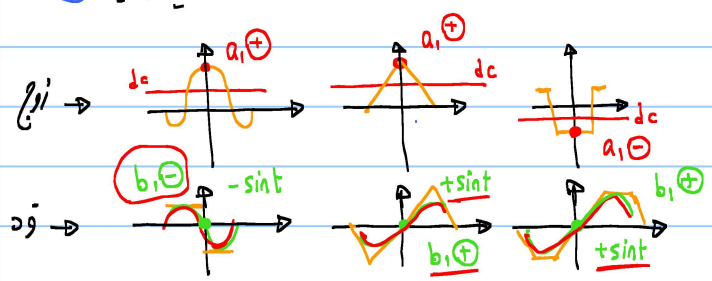
① dc

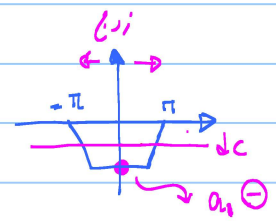
② تقارن → تقارن محض فرد
dc + sin

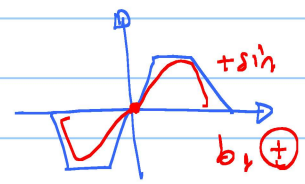
*** نیم موج → نوع هارمونیک

زمانی تقارن محض فرد را چک کنیم که تابع نه زوج و نه فرد به تنها داده باشد
به این صورت که کل تابع را به اندازه dc به سمت پایین و کنیم تا فرد شد دارای
تقارن محض فرد و در بازه سری فوریه آن تنها شامل dc و sin خواهد بود

③ علامت اولین هارمونیک







④ ضرایب سری فوریه (a_n, b_n)

A) $\lim_{n\to\infty} a_n, b_n = 0$

B) به ازای همه n ها باید سوپریمم آنها

$\frac{4n^2}{\pi}$ ✗

$\frac{4}{\pi(n-1)}$ ✗

C) a_n : نسبت به زوج
b_n : " " فرد

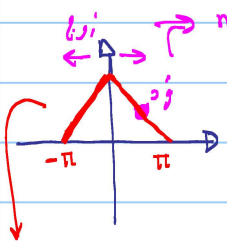
$a_n = \frac{4}{\pi n^2}$ ✓

$b_n = \underbrace{\frac{-4}{n}}_{\text{فرد}} \underbrace{\sin\frac{n\pi}{2}}_{\text{فرد}}$ ✗

D) حداقل مرتبه رشد ضرایب فوریه $\propto \frac{K}{n^{\text{ثابت}}}$

$b_n = \frac{-4}{\pi n}$ ✓

↳ $\frac{-4}{\pi\sqrt{n}}$ ✗

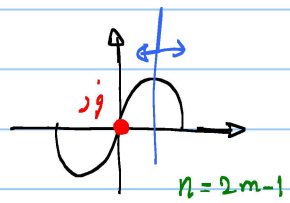


n = 2m-1

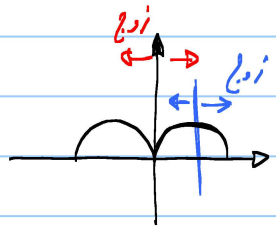
زوج → $b_n = 0$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos x + a_2\cos 2x + a_3\cos 3x + a_4\cos 4x + a_5\cos 5x + \cdots$$

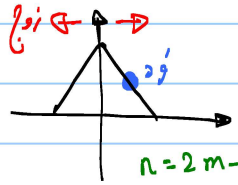
تقارن نیم موج :



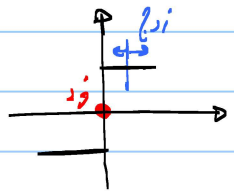
n = 2m-1



n = 2m



n = 2m-1



n = 2m-1

مثال سری فوریه مثلثاتی تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}-x & 0\le x\le \pi\\ x-\frac{3}{2}\pi & \pi\le x\le 2\pi\end{cases}$، کدام است؟

۱) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2(2k-1)^2}\cos(2k-1)x$

۲) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi(2k-1)^2}\cos(2k-1)x$

۳) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi(2k-1)^2}\cos(2k-1)x$

۴) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2k-1)^2}\cos(2k-1)x$

مثال ضرایب سری فوریه در کدام سری، سری فوریه تابعی انتگرال‌پذیر و متناوب با دوره تناوب 2π است؟

۱) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt{n}}$ ✗ (a_n)

۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n} \sin nx$ ✓

۳) $\sum_{n=2}^{\infty} (\ln(n)) \cos nx$ ✗ (a_n)

۴) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(n-1)x}{\sqrt{n}}$ ✗ (b_n)

$a_n = \ln(n) = \infty$
$n \to \infty$

- فرض کنید f و f′ توابع تکه‌ای پیوسته بر روی $[-L,L]$ باشند، حاصل $\lim_{n\to+\infty} \int_{-L}^{L} f(x)\cos(\frac{n\pi x}{L})dx, n \in \mathbb{N}$، کدام است؟

۱) π

۲) صفر ✓

۳) $\frac{\pi}{2}$

۴) مقدار حد وجود ندارد.

(۱۴۰۰ - برق و مکانیک - ارشد)

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x \, dx$

☑ مدت پاسخ‌گویی به هر قسمت: کمتر از ۵ دقیقه

مثال بسط کسینوسی تابع $\sin x$ در محدوده $0 < x < \frac{\pi}{2}$ به صورت زیر است؟

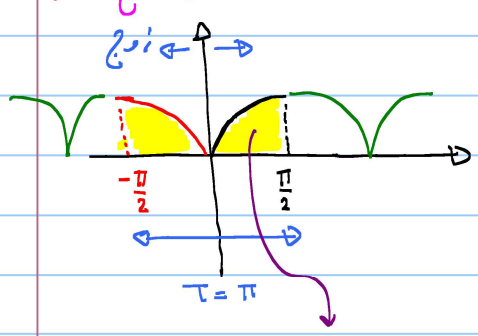
۱) $\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\frac{4}{\pi}}{4n^2-1} \cos(nx)$

۲) $\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\frac{4}{\pi}n}{4n^2-1} \cos(2nx)$

۳) $\sin x = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\frac{4}{\pi}}{4n^2-1} \cos(2nx)$ ✓

۴) تابع دارای بسط مذکور نمی‌باشد چون تابع فرد و بسط زوج است.

! وقتی که بسط کسینوسی یعنی زوج کنترتر بره



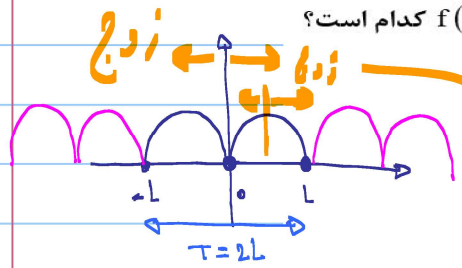
خاصیت $S = ✓$

$dc = ✓$

مدت زمان: کمتر از ۱۰ دقیقه

(تحلیل ۱و۲و۳ یعنی)

مثال سری فوریه کسینوسی نیم دامنه تابع $f(x)=x(L-x)\ ,\ 0\le x\le L$ کدام است؟



$x=0 \rightarrow f(x)=0$

$x=L \rightarrow f(x)=0$

$n=2m$

۱) $\frac{L^2}{4}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4L^2}{4(m\pi)^2}\cos\frac{2m\pi}{L}x$

۲) $\frac{L^2}{3}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{L^2}{(m\pi)^2}\cos\frac{2m\pi}{L}x$

۳) $\frac{L^2}{6}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4L^2}{4(m\pi)^2}\cos\frac{2m\pi x}{L}$ ✓

۴) $\frac{L^2}{6}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4L^2}{(2m-1)^2\pi^2}\cos\frac{(2m-1)\pi}{L}x$

(۱۰۰ تست برای مکانیک ۹۲)

$$a_0=\frac{2}{L}\int_0^L x(L-x)\,dx=\frac{2}{L}\int_0^L(Lx-x^2)\,dx$$

$$=\frac{2}{L}\left(L\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^L=\frac{2}{L}\left(\frac{L^3}{2}-\frac{L^3}{3}\right)$$

$$a_0=\frac{L^2}{3}\ \dashrightarrow\ dc=\frac{a_0}{2}=\frac{L^2}{6}\ \dashrightarrow\ 1,2\ (\times)$$

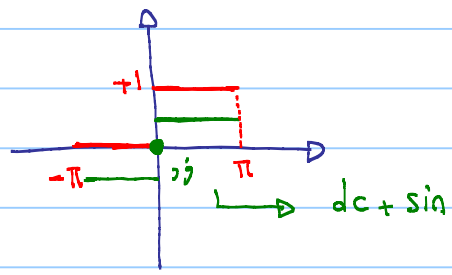
مثال سری فوریه مثلثاتی تابع متناوب $f(x)=\begin{cases}0 & -\pi\le x<0\\ 1 & 0\le x\le\pi\end{cases}$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{2k}$

۲) $\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\sin(2k+1)x}{\pi(2k+1)}$ ✓

۳) $\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\sin kx$

۴) $\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)}\sin(2k+1)x+\frac{1}{k}\cos kx$



مثال در بسط فوریه تابع $f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(\frac{n\pi t}{3}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi t}{3}\right)$ که در یک پریود

$$f(t)=\begin{cases}-t-3 & ;\ -3\le t\le -2\\ -1 & ;\ -2\le t\le -1\\ t & ;\ -1\le t\le 1\\ 1 & ;\ 1\le t\le 2\\ -t+3 & ;\ 2\le t\le 3\end{cases}$$

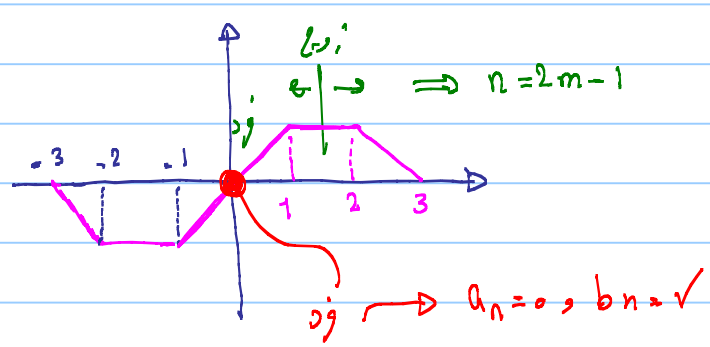
باشد، آن‌گاه ضرایب غیرصفر فقط عبارتند از:

۱) n, a_n فرد

۲) n, a_n زوج

۳) n, b_n زوج

۴) n, b_n فرد ✓



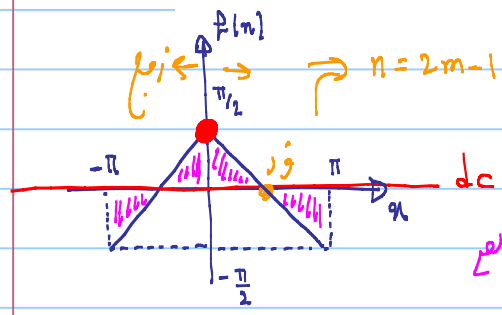
مثال سری فوریه کسینوسی نیم‌دامنه تابع $f(x)=\frac{\pi}{2}-x$ ، $0\le x\le \pi$ کدام است؟

۱) $\sum_{m=1}^{\infty} -\frac{1}{\pi m^2}\cos(2mx)$

۲) $\frac{\pi}{2}+\sum_{m=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2m-1)^2}\cos(2m-1)x$

۳) $\sum_{m=1}^{\infty} -\frac{4}{\pi(2m-1)^2}\cos(2m-1)x$

۴) $\sum_{m=1}^{\infty} +\frac{4}{\pi(2m-1)^2}\cos(2m-1)x$



$n=2m-1$

$S=0 \rightarrow a_0=0 \rightarrow dc=0$

مثال دوره تناوب و ضریب a_n در بسط فوریه تابع $f(x)=|\sin \pi x|$ کدام‌اند؟

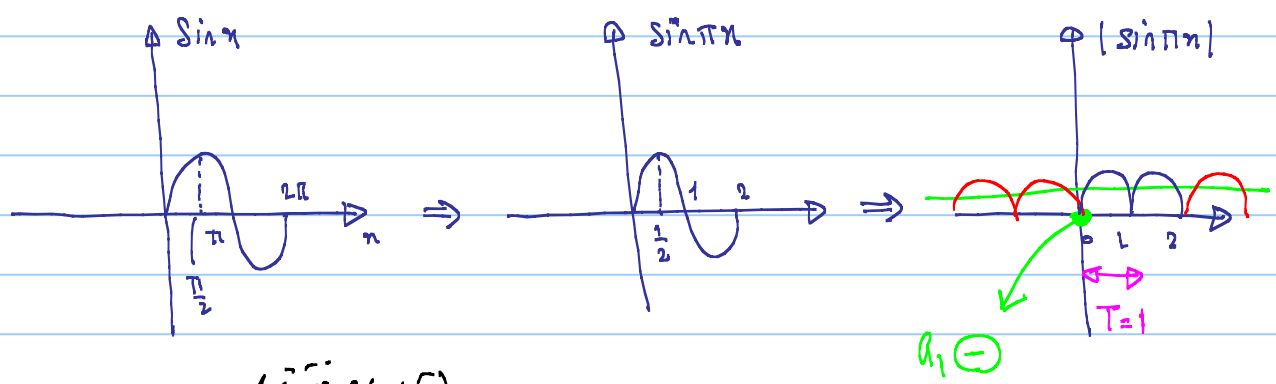
$n=1 \Rightarrow a_n<0$

۱) تناوب 1 و $a_n=\frac{4}{\pi(1-4n^2)}$

۲) تناوب π و $a_n=\frac{4}{\pi(1-4n^2)}$

۳) تناوب π و $a_n=\frac{\pi}{4n^2-1}$

۴) تناوب 1 و $a_n=\frac{\pi}{4n^2-1}$



(آزمون موقت)

مثال اگر $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ و $0<x<2\pi$ آن‌گاه جواب صحیح کدام است؟

۱) $f(x)=\frac{\pi+x}{2}$ ۲) $f(x)=\frac{\pi}{2}-x$ ۳) $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$ ۴) $f(x)=\frac{\pi}{2}+x$

یاد